

Exercices Série 3

- 1) Donnez la représentation binaire $(0.58203125)_{10} \Rightarrow (?)_2$
ATTENTION : le premier bit correspond à 2^{-1} et pas 2^0 !!
- 2) Que vaut $(0.143103)_5$?
- 3) Exprimez $(106.325)_{10}$ en base $(?)_2$
- 4) Montrez que tout nombre décimal ayant au moins une et un nombre fini de décimales non nulles et dont la dernière décimale n'est pas un 5 ne peut pas s'écrire avec un nombre fini de bits en base $(0.?)_2$.

Réponses

- 1) $(0.10010101)_2$.
- 2) $(0.385792)_{10}$.
- 3) Décomposons en 2 parties – la partie entière puis la partie décimale. Pour la partie entière, utilisons la méthode de la division :

$106 : 2 = 53$	reste 0
$53 : 2 = 26$	reste 1
$26 : 2 = 13$	reste 0
$13 : 2 = 6$	reste 1
$6 : 2 = 3$	reste 0
$3 : 2 = 1$	reste 1
$1 : 2 = 0$	reste 1 STOP \Rightarrow la partie entière est $(1101010)_2$

Maintenant la partie décimale, via la méthode de la multiplication :

$0.325 \times 2 = 0.65$	bit : 0
$0.65 \times 2 = 1.3$	bit : 1
$0.3 \times 2 = 0.6$	bit : 0
$0.6 \times 2 = 1.2$	bit : 1
$0.2 \times 2 = 0.4$	bit : 0
$0.4 \times 2 = 0.8$	bit : 0
$0.8 \times 2 = 1.6$	bit : 1
$0.6 \times 2 = 1.2$	bit : 1 (001)
...	1001 périodique !

La réponse est donc $(1101010.010\overline{1001})_{10}$.

- 4) Notons d'abord que si nous avons un nombre fini de décimales non nulles, la méthode de la multiplication aboutira forcément, après un nombre fini d'étapes (donc de bits) au cas avec 1 seule décimale non nulle. Supposons que c'est après N étapes dans la méthode de multiplication.

L'exemple précédent nous montre que si cette dernière décimale est PAIRE (2, 4, 6, 8), alors nous aurons un cycle (donc une infinité de décimales).

Si à l'étape N nous avons 1, 3, 7 ou 9, à l'étape N+1 nous tomberons sur 2, 6, 4 respectivement 8 – donc nous retombons dans le cycle.

Si la dernière décimale est un 0, la méthode se termine à l'étape N, mais cela signifie que la dernière décimale à l'étape N-1 était un 5.

Si la dernière décimale est un 5, N-1 était 0.25 donc N-1 se terminait par un 5, idem pour N-2 et ainsi de suite – donc à l'étape 0 (qui correspond au nombre de départ) la dernière décimale non nulle de départ était aussi un 5.

En résumé : si la dernière décimale à l'étape N est 1,2,3,4,6,8 ou 9, nous cyclons pour sûr. Dans les autres cas (0 ou 5), la dernière décimale non nulle du nombre de départ était forcément 5. □